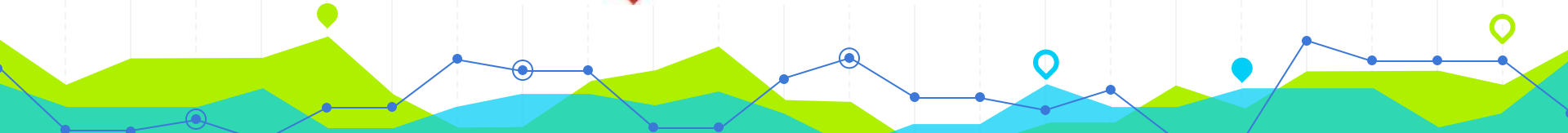




Lisbon School
of Economics
& Management

Universidade de Lisboa



Estatística II

Licenciatura em Gestão do Desporto
2.º Ano/2.º Semestre
2025/2026

Aulas Teórico-Práticas N.º 3 e 4 (Semana 2)

Docente: Elisabete Fernandes

E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt



<https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao>



<https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/>

Conteúdos Programáticos

Aulas Teórico-Práticas (Semanas 1 a 3)

- **Capítulo 1:** Revisões e Distribuições de Amostragem

Aulas Teórico-Práticas (Semanas 4 a 7)

- **Capítulo 2:** Estimação

Aulas Teórico-Práticas (Semanas 7 a 9)

- **Capítulo 3:** Testes de Hipóteses

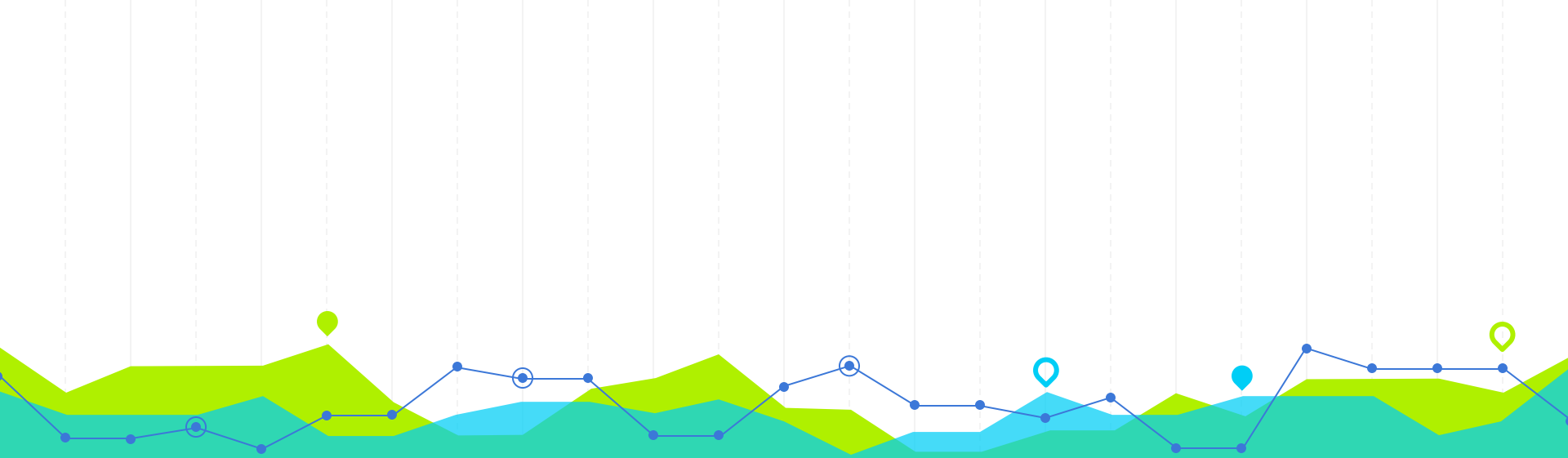
Aulas Teórico-Práticas (Semanas 10 a 13)

- **Capítulo 4:** Modelo de Regressão Linear Múltipla

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

<https://cas.iseg.ulisboa.pt>



Média Amostral: Exercícios

Distribuições de Amostragem

1

Um fabricante de automóveis defende que o novo modelo que vai ser lançado no próximo mês gasta em média 9,7 litros aos 100 km, em circuito urbano, com desvio padrão de 1 litro. Admita que o consumo segue uma distribuição Normal.

- a) Qual a probabilidade de numa amostra aleatória de 20 automóveis o gasto médio ser superior a 10 litros.
- b) Qual a deverá ser a dimensão da amostra para obter, com pelo menos 90% probabilidade, um gasto médio inferior a 10 litros.

[ProbabilidadesEstatistica2019.pdf](#)



Exercício: Média Amostral com Variância Conhecida

Seja X a v.a. que representa o número de litros consumidos pelo automóvel aos 100 km, em circuito urbano, com $X \sim N(\mu = 9,7; \sigma = 1)$.

a) $n = 20$.

$$\begin{array}{l} X \text{ dist. Normal} \\ \sigma \text{ conhecido} \end{array} \quad \left| \Rightarrow Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0; 1). \right.$$

$$\begin{aligned} P(\bar{X} > 10) &= 1 - P(\bar{X} \leq 10) = 1 - P\left(Z \leq \frac{10 - 9,7}{\frac{1}{\sqrt{20}}}\right) = 1 - P(Z \leq 1,34) = 1 - \Phi(1,34) \\ &= 1 - 0,9099 = 0,0901. \end{aligned}$$

b) $n = ?$

$$P(\bar{X} < 10) \geq 0,9 \Leftrightarrow P\left(Z < \frac{10 - 9,7}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right) \geq 0,9 \Leftrightarrow \Phi(0,3\sqrt{n}) \geq 0,9$$

$$\text{como } \Phi(1,282) = 0,9$$

$$\Leftrightarrow 0,3\sqrt{n} \geq 1,282 \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 4,2733 \Rightarrow n \geq 4,2733^2 = 18,3 \Rightarrow n \geq 19.$$

Um fabricante de automóveis defende que o novo modelo que vai ser lançado no próximo mês gasta em média 9,7 litros aos 100 km, em circuito urbano, e o desvio padrão é desconhecido. Através de um esquema de amostragem estimou-se tal desvio padrão como sendo $s = 1$ litro. Admitindo que o consumo segue uma distribuição Normal, qual a probabilidade de, numa amostra aleatória de 20 automóveis, o consumo médio amostral ser superior a 10 litros? E inferior a 8,9 litros?

[ProbabilidadesEstatistica2019.pdf](#)



Exercício: Média Amostral com Variância Desconhecida

Seja X a v.a. que representa o número de litros consumidos pelo automóvel aos 100 km, em circuito urbano, com $X \sim N(\mu = 9,7; \sigma = ?)$.

$n = 20$.

$$\begin{array}{l} X \text{ dist. Normal} \\ \sigma \text{ desconhecido} \end{array} \quad \left| \Rightarrow T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1=19}.$$

$$P(\bar{X} > 10) = 1 - P(\bar{X} \leq 10) = 1 - P\left(T \leq \frac{10 - 9,7}{\frac{1}{\sqrt{20}}}\right) = 1 - P(T \leq 1,342) \approx 1 - 0,9 = 0,1.$$

$$P(\bar{X} < 8,9) = P\left(T < \frac{8,9 - 9,7}{\frac{1}{\sqrt{20}}}\right) = P(T < -3,578) = 1 - P(T < 3,578) \approx 1 - 0,999 = 0,001.$$

37. De uma população normal de média e variância desconhecidas retirou-se uma amostra casual.
- a) Determine a percentagem de amostras em que a sua média difere da média da população, por valores superiores ao desvio padrão da população, considerando que a amostra tem 4 observações.
 - b) Determine a percentagem de amostras de 5 observações em que as suas médias diferem da média da população, por valores superiores ao do desvio padrão da amostra.



Exercício 37 (a)

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

(a)

Amostra casual : $n = 4$

$$\text{Quer-se } P(|\bar{X} - \mu| > \sigma) = 1 - P(|\bar{X} - \mu| \leq \sigma) = 1 - P(-\sigma \leq \bar{X} - \mu \leq \sigma)$$

$$\text{Sabe-se que: } Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

Logo,

$$\begin{aligned} 1 - P(-\sigma \leq \bar{X} - \mu \leq \sigma) &= 1 - P\left(-\frac{\sigma}{\sigma/\sqrt{4}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\sigma}{\sigma/\sqrt{4}}\right) = \frac{1 - P(-2 \leq Z \leq 2)}{1 - [P(Z) - P(-2)]} \approx \\ &\approx 1 - 0.9545 = 0.0455 \end{aligned}$$

Supondo o desvio
padrão não corrigido, S

Exercício 37 (b)

Amostra casual: $n = 5$

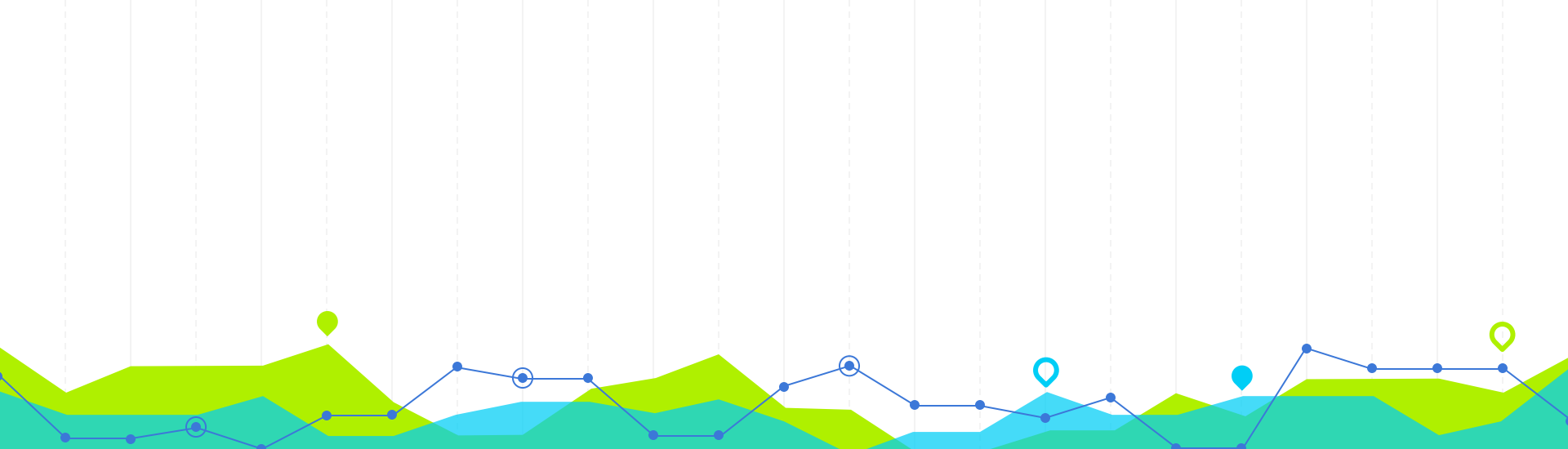
$$\text{Quer-se } P(|\bar{X} - \mu| > S) = 1 - P(|\bar{X} - \mu| \leq S) = 1 - P(-S \leq \bar{X} - \mu \leq S)$$

Sabe-se que: $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$

Logo,

$$1 - P(-S \leq \bar{X} - \mu \leq S) = 1 - P\left(-\frac{S}{s/\sqrt{5}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{s/n} \leq \frac{S}{s/\sqrt{5}}\right) = 1 - P(-\sqrt{5} < T < \sqrt{5})$$

$$\approx 0.1$$



Diferença de Médias Amostrais

Distribuições de Amostragem

2

Diferença de Médias Amostrais

Sejam $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1}$ e $X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2}$ duas a. a. independentes, de dimensão n_1 e n_2 retiradas de duas populações com médias μ_1 e μ_2 e desvios padrão σ_1 e σ_2 , respetivamente, e

$$\bar{X}_1 = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{X_{1i}}{n_1} \text{ e } \bar{X}_2 = \sum_{i=1}^{n_2} \frac{X_{2i}}{n_2}.$$

Diferença de Médias: Variâncias Conhecidas

Se as populações forem Normais, sendo $X_1 \sim N(\mu_1; \sigma_1)$ e $X_2 \sim N(\mu_2; \sigma_2)$, com σ_1 e σ_2 conhecidos, então, pelo Teorema da aditividade da distribuição Normal, tem-se que:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0; 1).$$

Se as populações não forem Normais, mas as amostras forem de grande dimensão então, pelo corolário do T. L. C., vem $Z \overset{\circ}{\sim} N(0; 1)$, considerando o já anteriormente exposto em situação análoga.

Diferença de Médias: Variâncias Desconhecidas e Iguais

Se as populações forem Normais, sendo $X_1 \sim N(\mu_1; \sigma_1)$ e $X_2 \sim N(\mu_2; \sigma_2)$, com σ_1 e σ_2 desconhecidos mas iguais ($\sigma_1 = \sigma_2$), então demonstra-se que:

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1 + n_2 - 2}.$$

Se as populações não forem Normais, mas as amostras forem de grande dimensão então, por extensão do T. L. C., a expressão anterior segue aproximadamente uma $N(0; 1)$.

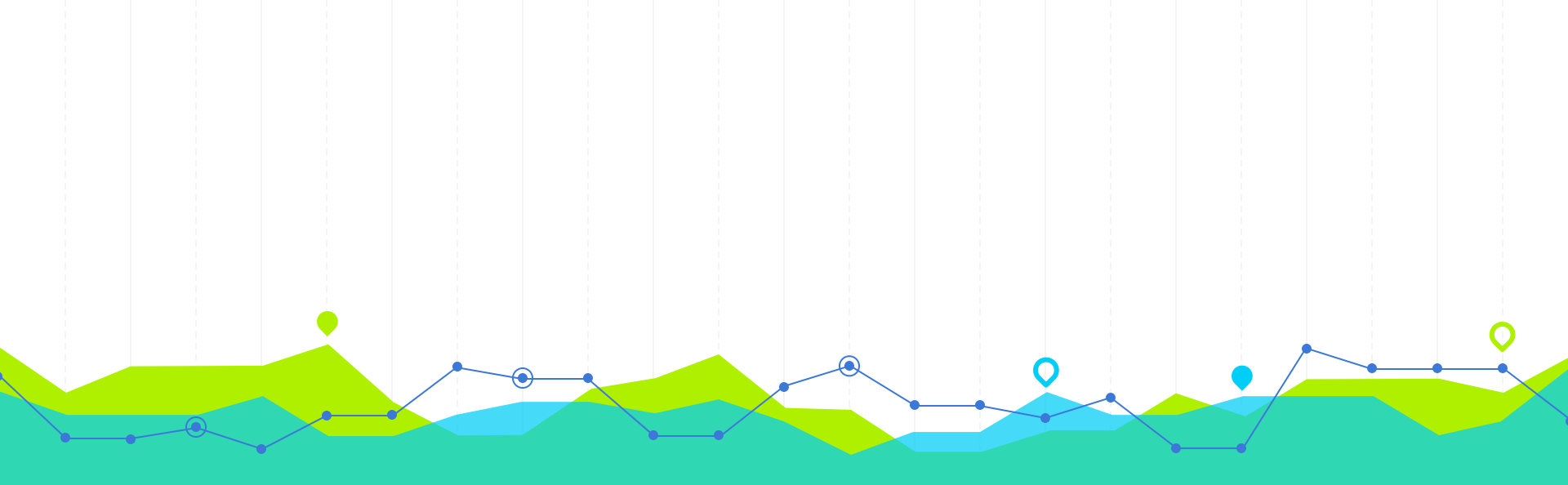
Diferença de Médias: Variâncias Desconhecidas e Diferentes

Se as populações forem Normais, sendo $X_1 \sim N(\mu_1; \sigma_1)$ e $X_2 \sim N(\mu_2; \sigma_2)$, com σ_1 e σ_2 desconhecidos e diferentes ($\sigma_1 \neq \sigma_2$), então, pela aproximação de Welch tem-se que (Murteira *et al.*, 2007):

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t_v, \text{ onde } v = \left\lfloor \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1 - 1} \left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2 - 1} \left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2} \right\rfloor.$$

sendo $[r]$ a parte inteira de r , ou seja, arredonda-se por defeito o valor obtido.

Também neste caso, se as populações não forem Normais, mas as amostras forem de grande dimensão então, por extensão do T. L. C., a expressão anterior segue aproximadamente uma $N(0; 1)$, sendo válidas as observações anteriores.



Diferença de Médias Amostrais: Exercícios

Distribuições de Amostragem

3

Uma dada empresa farmacêutica lançou no mercado um novo medicamento, para dormir, que tem estado a ser utilizado nos hospitais. Constatou-se que os doentes não sujeitos a este medicamento em média dormiam 7,5 horas, com desvio padrão de 1,4 horas, ao passo que os doentes aos quais se administrou este medicamento dormiam em média 8 horas com desvio padrão de 2 horas.

Num determinado hospital observaram-se 31 doentes não sujeitos ao referido medicamento e 61 sob a referida medicação. Qual a probabilidade de os doentes do primeiro grupo observado dormirem em média mais do que os do segundo grupo? Assuma a normalidade das distribuições.

[ProbabilidadesEstatistica2019.pdf](#)



Exercício: Diferença de Médias Amostrais e Variâncias Conhecidas

Sejam:

- X_1 a v.a. que representa o número de horas de sono dos doentes não sujeitos ao medicamento,
- X_2 a v.a. que representa o número de horas de sono dos doentes sujeitos ao medicamento,

com

$$X_1 \sim N(\mu_1 = 7,5; \sigma_1 = 1,4) \text{ e } X_2 \sim N(\mu_2 = 8; \sigma_2 = 2).$$

$$\left. \begin{array}{l} X_1 \text{ e } X_2 \text{ dist. Normal} \\ \sigma_1 (= 1,4) \text{ e } \sigma_2 (= 2) \text{ conhecidos} \end{array} \right| \Rightarrow Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0; 1).$$

$$\begin{aligned} P(\bar{X}_1 > \bar{X}_2) &= P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 0) = 1 - P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \leq 0) = 1 - P\left(Z \leq \frac{0 - (7,5 - 8)}{\sqrt{\frac{1,4^2}{31} + \frac{2^2}{61}}}\right) = 1 - \Phi(1,39) \\ &= 1 - 0,9177 = 0,0823. \end{aligned}$$

Uma dada empresa farmacêutica lançou no mercado um novo medicamento, para dormir, que tem estado a ser utilizado nos hospitais. Constatou-se que os doentes não sujeitos a este medicamento em média dormiam 7,5 horas, enquanto os doentes aos quais se administrou este medicamento dormiam em média 8 horas.

Num determinado hospital observaram-se n_1 doentes não sujeitos ao referido medicamento e n_2 sob a referida medicação tendo-se obtido, respetivamente, os seguintes desvios-padrão: 1,4 horas e 2 horas. Determine a probabilidade de os doentes do primeiro grupo dormirem em média menos do que os do

segundo grupo, quando $n_1 = 20$ e $n_2 = 27$, quando se verifica a normalidade das distribuições e se considera:

- a) A igualdade das variâncias populacionais.
- b) A desigualdade das variâncias populacionais.

[ProbabilidadesEstatistica2019.pdf](#)



Exercício: Diferença de Médias Amostrais e Variâncias Desconhecidas e Iguais

Sejam:

- X_1 a v.a. que representa o número de horas de sono dos doentes não sujeitos ao medicamento,
- X_2 a v.a. que representa o número de horas de sono dos doentes sujeitos ao medicamento,

Com $X_1 \sim N(\mu_1 = 7,5; \sigma_1 = ?)$ e $X_2 \sim N(\mu_2 = 8; \sigma_2 = ?)$.

$n_1 = 20$; $s_1 = 20$; $n_2 = 27$ e $s_2 = 2$.

a)

$$\begin{array}{l} X_1 \text{ e } X_2 \text{ dist. Normal} \\ \sigma_1 \text{ e } \sigma_2 \text{ desconhecidos, mas iguais} \end{array} \quad \left| \Rightarrow T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1 + n_2 - 2 = 45} \right.$$
$$P(\bar{X}_1 < \bar{X}_2) = P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 < 0) = P\left(T < \frac{0 - (7,5 - 8)}{\sqrt{\frac{(20 - 1)1,4^2 + (27 - 1)2^2}{20 + 27 - 2}} \sqrt{\frac{1}{20} + \frac{1}{27}}}\right) = P(T < 0,957)$$
$$\approx 0,83.$$

Exercício: Diferença de Médias Amostrais e Variâncias Desconhecidas e Diferentes

b)

X_1 e X_2 dist. Normal

σ_1 e σ_2 desconhecidos e diferentes

$$\Rightarrow T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t_{v=44},$$

pois

$$v = \left[\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2} \right)^2}{\frac{1}{n_1 - 1} \left(\frac{S_1^2}{n_1} \right)^2 + \frac{1}{n_2 - 1} \left(\frac{S_2^2}{n_2} \right)^2} \right] = \left[\frac{\left(\frac{1,4^2}{20} + \frac{2^2}{27} \right)^2}{\frac{1}{20 - 1} \left(\frac{1,4^2}{20} \right)^2 + \frac{1}{27 - 1} \left(\frac{2^2}{27} \right)^2} \right] = [44,9] = 44.$$

$$P(\bar{X}_1 < \bar{X}_2) = P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 < 0) = P\left(T < \frac{0 - (7,5 - 8)}{\sqrt{\frac{1,4^2}{20} + \frac{2^2}{27}}}\right) = P(T < 1,008) \approx 0,84.$$

41. Um centro emissor de cartões de segurança tem dois equipamentos de personalização, de funcionamento independente. O tempo de processamento, em segundos, para cada um deles tem comportamento normal com o mesmo tempo médio, sendo o desvio padrão do primeiro 10, e do segundo 15. Considerando amostras de 16 cartões personalizados de cada um dos equipamentos,
- a) Calcule a probabilidade de a diferença entre as médias das duas amostras, em valor absoluto, ser superior a 5.
 - b) Qual a probabilidade do desvio padrão dos tempos de processamento dos cartões da amostra do primeiro equipamento ser superior ao da amostra do segundo equipamento?



Exercício 41 (a)

X_1 - v.a. tempo processamento do equipamento 1, em segundos

X_2 - v.a. tempo processamento do equipamento 2, em segundos

$X_1 \sim N(\mu_1, 10^2) \rightarrow$ Amostra casual: $m = 16$

$X_2 \sim N(\mu_2, 15^2) \rightarrow$ Amostra casual: $n = 16$

, onde $\mu_1 = \mu_2$

(a)

$$\text{Quer-se: } P(|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| > 5) = 1 - P(|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| \leq 5) = 1 - P(-5 \leq \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \leq 5)$$

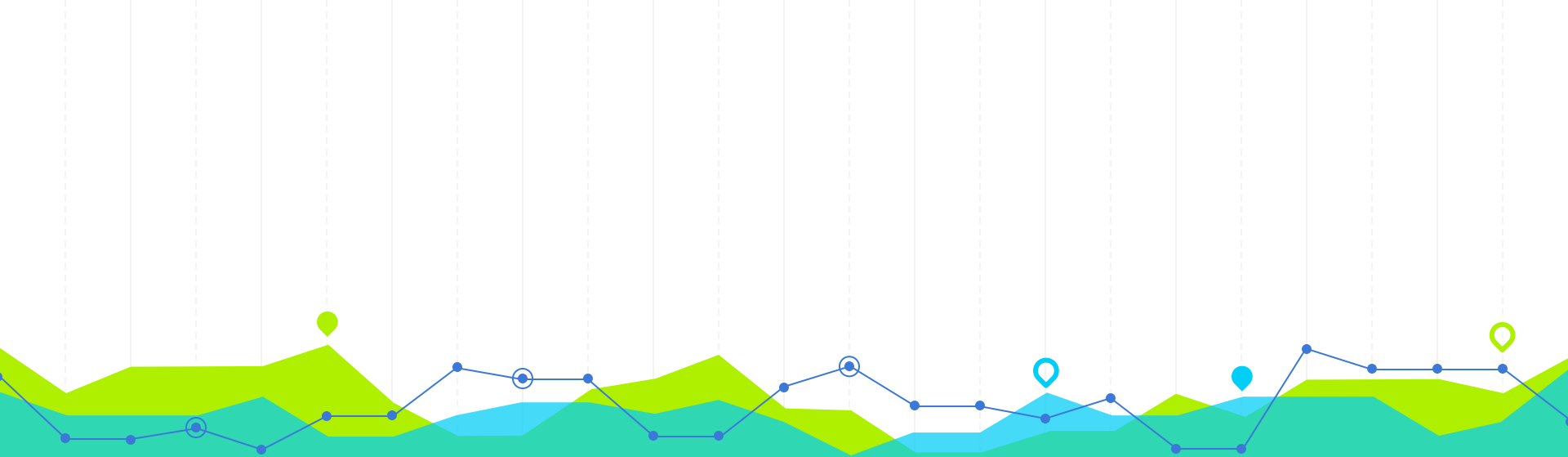
$$\text{Sabe-se que: } Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0, 1) \text{ . Logo,}$$

Exercício 41 (a)

$$1 - P\left(-5 \leq \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \leq 5\right) = 1 - P\left(\frac{-5 - 0}{\sqrt{\frac{10^2}{16} + \frac{15^2}{16}}} \leq \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} \leq \frac{5 - 0}{\sqrt{\frac{10^2}{16} + \frac{15^2}{16}}}\right) =$$

$$= 1 - P\left(\frac{-5}{\sqrt{20.3125}} \leq Z \leq \frac{5}{\sqrt{20.3125}}\right) = 1 - \left[\Phi(1.11) - \Phi(-1.11)\right] =$$

$$= 1 - \left[2\Phi(1.11) - 1\right] = 2 - 2\Phi(1.11) = 2 - 2 \times 0.8665 = 0.267$$



Variância Amostral

Distribuições de Amostragem

4

Variância Amostral

Seja $X_1, X_2, \dots, X_n$, uma a. a. duma dada população com variância σ^2 . A **variância amostral** é definida por:

$$\text{Variância corrigida } S^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1}.$$

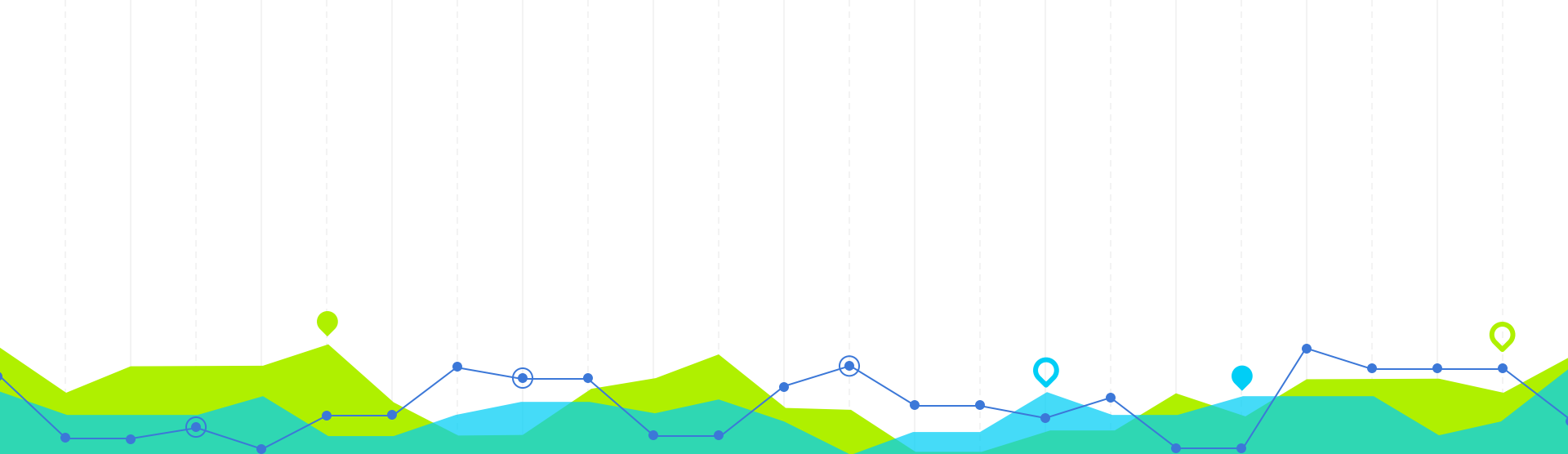
Propriedades:

- $\mu_{S^2} = E(S^2) = \sigma^2$.
- Se a distribuição da população for Normal então $\sigma_{S^2}^2 = \text{Var}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$.

Se a distribuição da população for Normal, com variância σ^2 , então:

$$\chi^2 = \frac{(n-1) S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2.$$

[ProbabilidadesEstatistica2019.pdf](#)



Variância Amostral: Exercícios

Distribuições de Amostragem

5

Uma determinada empresa farmacêutica lançou no mercado um novo medicamento, para dormir, que tem estado a ser utilizado nos hospitais. Constatou-se que os doentes sujeitos a este medicamento em média dormiam 8 horas, sendo o desvio padrão de 2 horas, e que a distribuição do número de horas de sono podia ser considerada Normal.

Qual a probabilidade de, numa amostra aleatória de 31 doentes sujeitos ao referido medicamento:

- a) A variância amostral ser superior a 5 horas?
- b) A variância amostral ser inferior a 2,25 horas?

Supondo a variância corrigida

[ProbabilidadesEstatistica2019.pdf](#)



Exercício: Variância Amostral

Seja X a v.a. que representa o número de horas de sono dos doentes sujeitos ao medicamento, com $X \sim N(\mu = 8; \sigma = 2)$.

$$\left. \begin{array}{l} X \text{ dist. Normal} \\ n = 31 \end{array} \right| \Rightarrow \chi^2 = \frac{(n-1) S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1=30}^2.$$

Supondo a variância corrigida

$$\text{a) } P(S^2 > 5) = 1 - P(S^2 \leq 5) = 1 - P\left(\chi^2 \leq \frac{(31-1) \times 5}{2^2}\right) = 1 - P(\chi^2 \leq 37,5) \approx 1 - 0,84 = 0,16.$$

$$\text{b) } P(S^2 < 2,25) = 1 - P\left(\chi^2 < \frac{(31-1) \times 2,25}{2^2}\right) = P(\chi^2 \leq 16,875) \approx 0,026.$$

39. De uma população normal de variância 64, tomou-se uma amostra de dimensão 3.
- a) Qual a probabilidade de a variância da amostra exceder 78?
 - b) Responda à mesma pergunta para uma amostra de dimensão 16.

Supondo a variância
corrigida



Exercício 39 (a)

$$X \sim N(\mu, 64) \rightarrow \text{Amostra: } n = 3$$

(a)

$$\text{Quer-se } P(S^2 > 78)$$

$$\text{Sabe-se que: } Q = \frac{(n-1) S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2 = \chi^2(2), \text{ onde } n=3 \text{ e } \sigma^2=64$$

Logo,

Supondo a variância
não corrigida

$$P(S^2 > 78) = P\left(\frac{n S^2}{\sigma^2} > \frac{2 \times 78}{64}\right) = P(Q > 2.4375) \approx 0.1607$$

Exercício 39 (b)

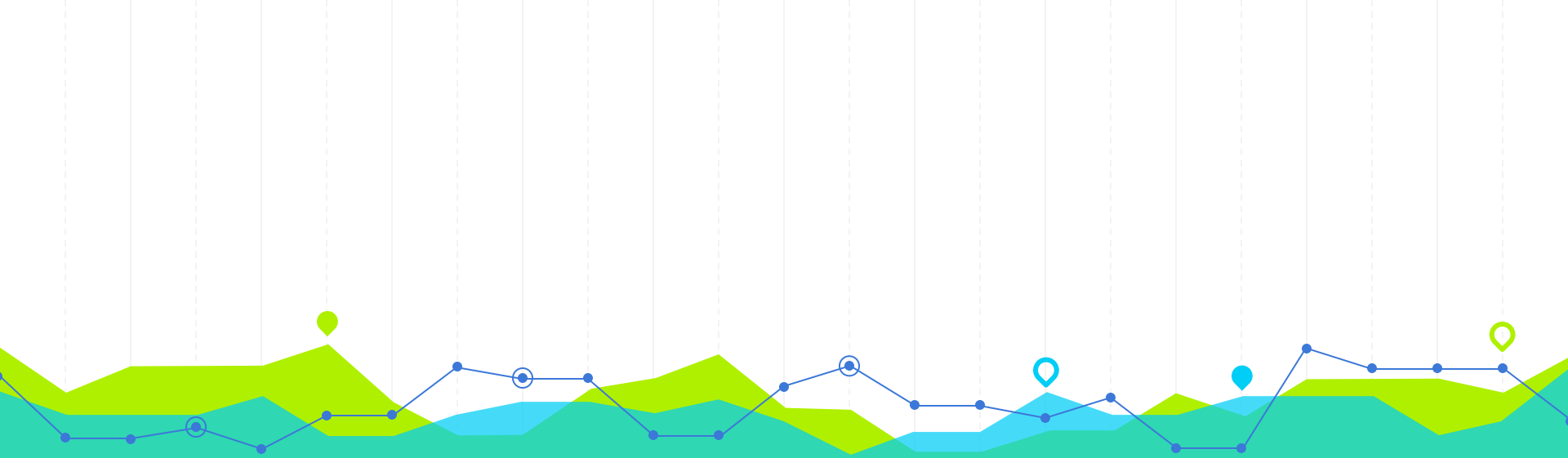
Amostra : $n = 16$

$$Q = \frac{(n-1) S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2 = \chi_{(15)}^2$$

Logo,

Supondo a variância corrigida

$$P(S^2 > 78) = P\left(\frac{15 S^2}{\sigma^2} > \frac{15 \times 78}{64}\right) = P(Q > 15.28) \approx 0.192$$



Quociente de Variâncias Amostrais

Distribuições de Amostragem

6

Quociente de Variâncias Amostrais

Sejam $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1}$ e $X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2}$ duas a. a. independentes, de dimensão n_1 e n_2 retiradas de duas populações Normais, sendo $X_1 \sim N(\mu_1; \sigma_1)$ e $X_2 \sim N(\mu_2; \sigma_2)$, respetivamente, e

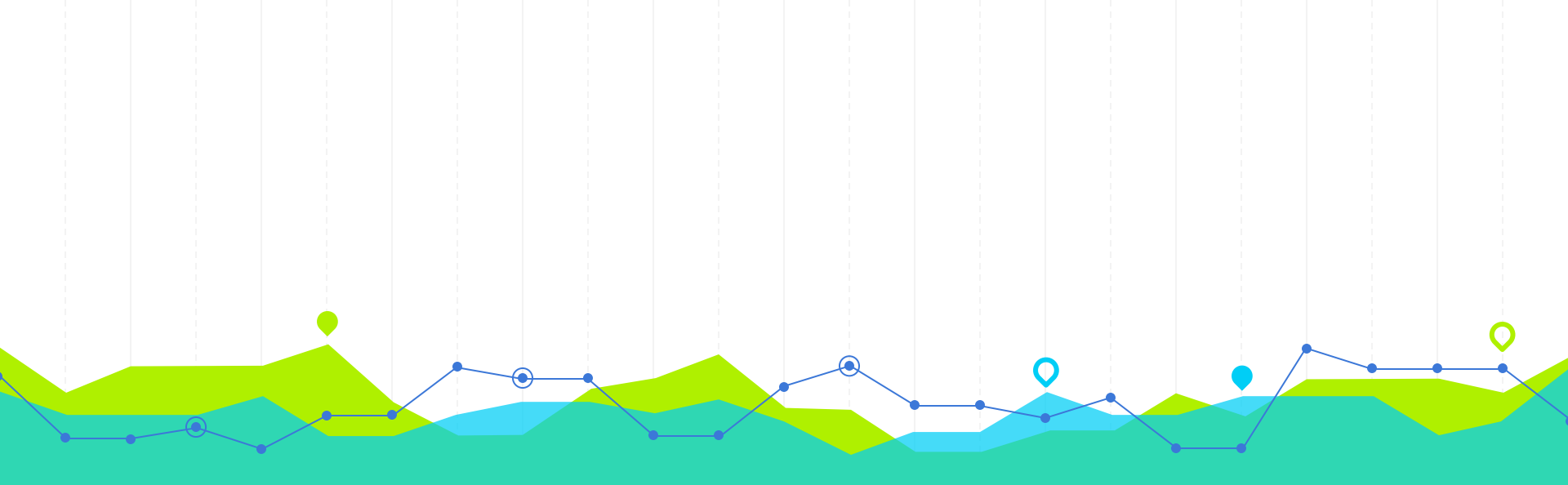
$$S_1^2 = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{(X_{1i} - \bar{X}_1)^2}{n_1 - 1} \text{ e } S_2^2 = \sum_{i=1}^{n_2} \frac{(X_{2i} - \bar{X}_2)^2}{n_2 - 1},$$

então, por um teorema da distribuição F , tem-se que:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F_{n_1-1; n_2-1}.$$

Supondo a variância corrigida

[ProbabilidadesEstatistica2019.pdf](#)



Quociente de Variâncias Amostrais: Exercícios

Distribuições de Amostragem

7

Uma determinada empresa farmacêutica lançou no mercado um novo medicamento, para dormir, que tem estado a ser utilizado nos hospitais. Constatou-se que os doentes não sujeitos a este medicamento em média dormiam 7,5 horas sendo o desvio padrão de 1,4 horas, enquanto os doentes aos quais se administrou este medicamento dormiam em média 8 horas sendo o desvio padrão de 2 horas.

Num determinado hospital observaram-se 31 doentes não sujeitos ao referido medicamento e 61 sujeitos ao medicamento. Qual a probabilidade da variância amostral do primeiro grupo ser inferior à do segundo grupo? Admita a normalidade dos dados.

Supondo a variância corrigida



[ProbabilidadesEstatistica2019.pdf](#)

Exercício: Quociente de Variâncias Amostrais

Sejam:

- X_1 a v.a. que representa o número de horas de sono dos doentes não sujeitos ao medicamento,
 - X_2 a v.a. que representa o número de horas de sono dos doentes sujeitos ao medicamento,
- com $X_1 \sim N(\mu_1 = 7,5; \sigma_1 = 1,4)$ e $X_2 \sim N(\mu_2 = 8; \sigma_2 = 2)$.

$$\begin{array}{l|l} X_1 \text{ e } X_2 \text{ dist. Normal} & \\ n_1 = 31 \text{ e } n_2 = 61 & \Rightarrow F = \frac{S_1^2 \sigma_2^2}{S_2^2 \sigma_1^2} \sim F_{n_1-1; n_2-1} = 30; 60. \end{array}$$

Supondo a variância corrigida

$$P(S_1^2 < S_2^2) = P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} < 1\right) = P\left(F < 1 \times \frac{2^2}{1,4^2}\right) = P(F < 2,04) \approx 0,99.$$

41. Um centro emissor de cartões de segurança tem dois equipamentos de personalização, de funcionamento independente. O tempo de processamento, em segundos, para cada um deles tem comportamento normal com o mesmo tempo médio, sendo o desvio padrão do primeiro 10, e do segundo 15. Considerando amostras de 16 cartões personalizados de cada um dos equipamentos,
- a) Calcule a probabilidade de a diferença entre as médias das duas amostras, em valor absoluto, ser superior a 5.
 - b) Qual a probabilidade do desvio padrão dos tempos de processamento dos cartões da amostra do primeiro equipamento ser superior ao da amostra do segundo equipamento?

Supondo a variância corrigida



Exercício 41 (b)

Então,

$$P(S_1^2 > S_2^2) = P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} > 1\right)$$

Supondo a variância corrigida

Sabe-se que: $F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(m-1, n-1)$, onde: $\sigma_1^2 = 10^2 = 100$; $\sigma_2^2 = 15^2 = 225$;
 $m = 16$ e $n = 16$

Logo,

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} > 1\right) = P\left(\underbrace{\frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}}_{F(15,15)} > 1 \cdot \frac{225}{100}\right) = P(F > 2.25) \approx 0.064$$

45. De duas populações normais independentes, com variâncias iguais, foram extraídas duas amostras casuais com dimensões 10 e 5, respectivamente. Determine os valores tais que entre eles esteja, com 95% de probabilidade, a razão das variâncias corrigidas das amostras.

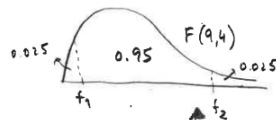


Exercício 45

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \rightarrow \text{Amostra casual : } m = 10$$

$$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \rightarrow \text{Amostra casual : } n = 5$$

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$$



Quer-se encontrar os valores f_1 e f_2 , tais que : $P\left(f_1 < \frac{S_1^2}{S_2^2} < f_2\right) = 0.95$

Sabe-se que $F = \frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} \sim F(m-1, n-1) = F(9, 4)$. Logo,

$$P\left(f_1 < \frac{S_1^2}{S_2^2} < f_2\right) = 0.95 \Rightarrow P\left(f_1 \cdot 1 < \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2} < f_2 \cdot 1\right) = 0.95 \Rightarrow P(f_1 < F < f_2) = 0.95$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(F < f_1) = 0.025 \\ P(F > f_2) = 0.025 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P\left(\frac{1}{F} > \frac{1}{f_1}\right) = 0.025, \text{ onde } \frac{1}{F} \sim F(4, 9) \\ f_2 = 8.90 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{f_1} = 4.72 \\ \text{"} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1 = \frac{1}{4.72} \\ \text{"} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1 = 0.212 \\ f_2 = 8.90 \end{cases}$$

Obrigada!

Questões?

